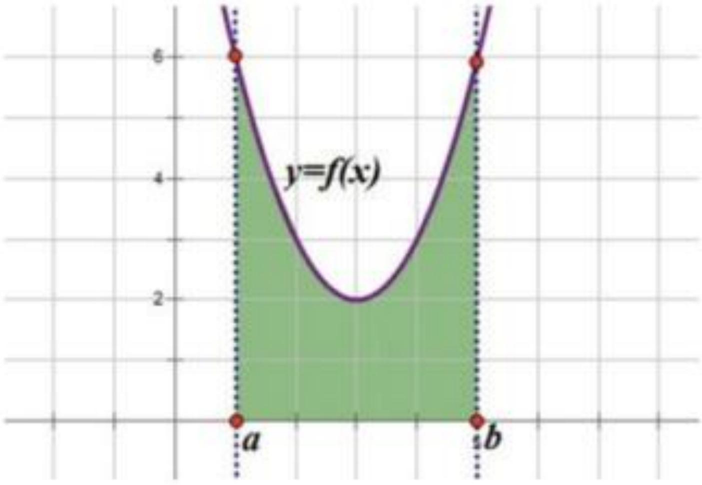
Дата	*22.05.2020*
Курс, группа	*1, ТО 1911/з*
Дисциплина (МДК)	*Математика*
ФИО преподавателя(ей)	*Евстигнеева Е.А.*
Тема	*Применение определенного интеграла для нахождения площади плоской фигуры*

№ п/п	Этап занятия	Время, 1ч 30 мин	Прием и методы
1	Организационный этап	5	zoom
3	Изучение нового материала	40	Пояснения к теме, разбор заданий (zoom)
4	Закрепление ранее изученного материала	30	Пояснения к заданиям самостоятельной работы (Посредством Whatsapp), вызвавших наибольшее затруднение.
5	Подведение итогов, рефлексия	15	Консультации в Whatsapp
6	Домашнее задание		Подготовка к диф.зачету

22.05.2020

Тема: Применение определенного интеграла для нахождения площади плоской фигуры.

Определение. Фигура, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, слева прямой $x = a$, справа прямой $x = b$, и снизу осью $0x$ называется *криволинейной трапецией*.



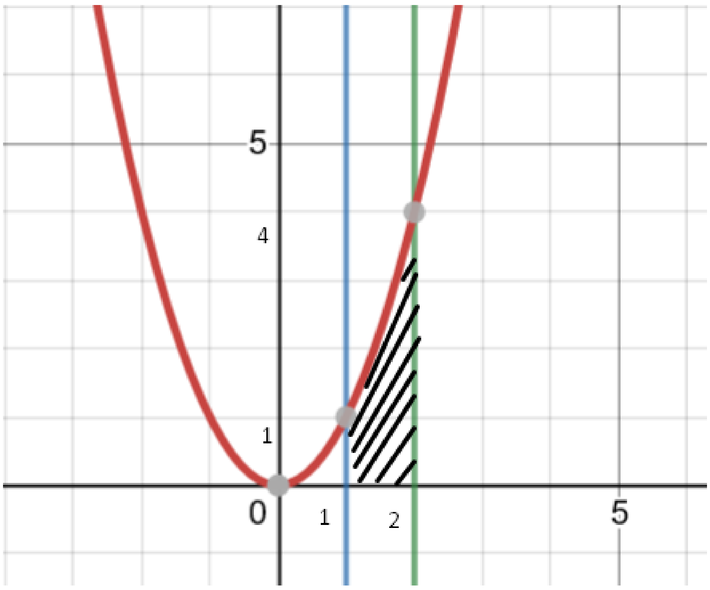
Геометрический смысл определенного интеграла:

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ - это число, равное площади криволинейной трапеции.

Вспомним формулу Ньютона-Лейбница.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\,|_a^b = F(b) - F(a)$$

Пример 1 Найти площадь фигуры, ограниченной графиком $y = x^2, x = 1, x = 2$, осью $0x$.



Решение:

Смотрим границы по оси Ox. Наша фигура расположена на отрезке $[1; 2]$. Поэтому границы интегрирования точки 1 и 2.

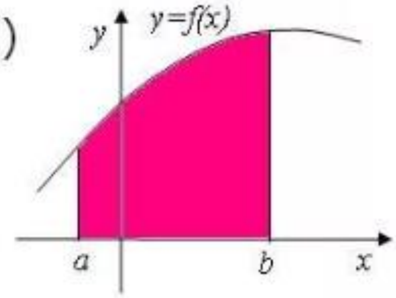
$$S = \int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$$

Ответ: $S = 2\frac{1}{3}$ кв.ед.

Формулы для вычисления площадей фигур с помощью интеграла

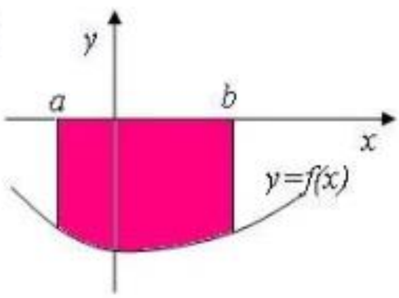
С помощью определенного интеграла записывают формулы для вычисления площадей плоских фигур, заштрихованных на рисунках 1) - 6).

1)



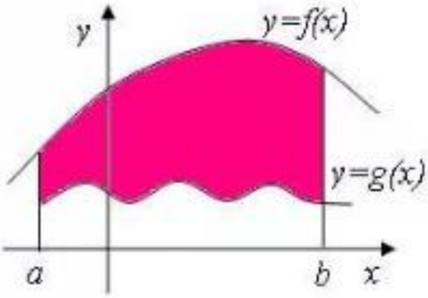
$$S = \int_a^b f(x)dx$$

2)



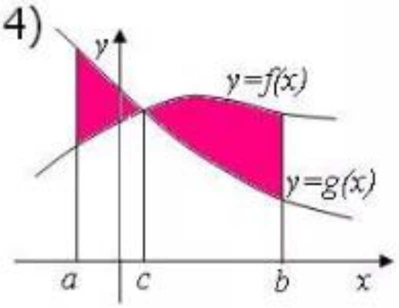
$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

3)



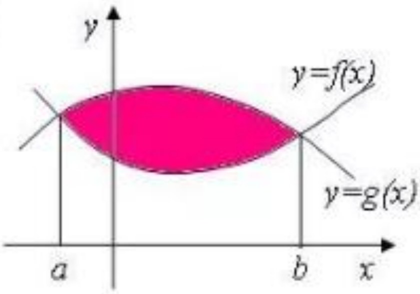
$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$$

4)



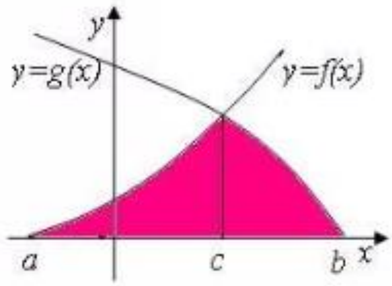
$$S=\int_a^c (g(x)-f(x))dx+\int_c^b (f(x)-g(x))dx$$

5)



$$S=\int_a^b (g(x)-f(x))dx$$

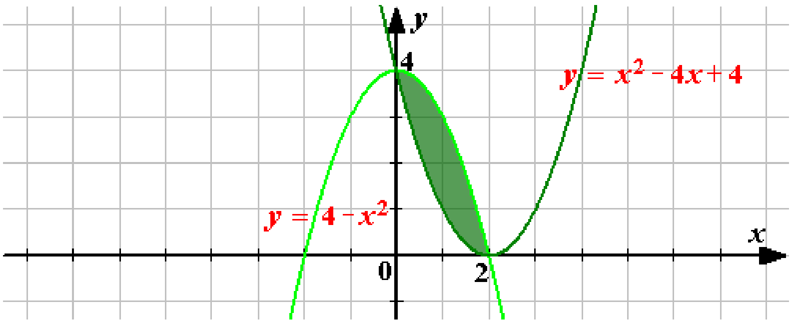
6)



$$S=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b g(x)dx$$

<u>Пример 2</u>

Вычислите площадь заштрихованной фигуры



Решение:

Закрашенная область находится между графиками функций $y = x^2 - 4x + 4$, $y = 4 - x^2$. Значит, площадь фигуры найдем по формуле 5).

$$\boldsymbol{S} = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))\, \boldsymbol{dx}$$

Границы интегрирования в нашем случае – точки пересечения графиков функций. Т.е. нижняя граница 0, верхняя граница 2.

Обратим внимание, что за $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ обозначена функция, ограничивающая фигуру сверху, за $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) -$ функция, ограничивающая фигуру снизу.

В нашем задании $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 4 - x^2$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = x^2 - 4x + 4$

Таким образом,

$$\boldsymbol{S} = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))\, \boldsymbol{dx} = \int_0^2 (4 - x^2 - (x^2 - 4x + 4))\, dx =$$

$$= \int_0^2 (4 - x^2 - x^2 + 4x - 4) dx = \int_0^2 (4x - 2x^2) dx =$$

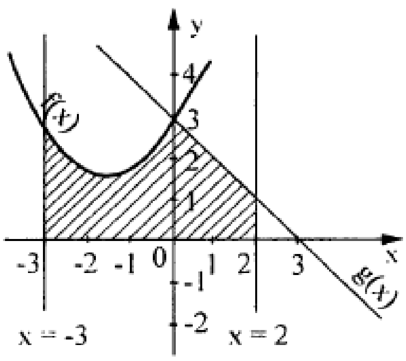
$$= \left(\frac{4x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \left(2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 2 \cdot 2^2 - \frac{2 \cdot 2^3}{3} = 8 - \frac{16}{3} =$$

$$= \frac{24 - 16}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

Ответ: $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{2}\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3}}$ кв. ед.

<u>Пример 3</u>

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $f(x) = 0.5x^2 + 2x + 3$, $g(x) = 3 - x$, прямыми $x = -3$; $x = 2$, и осью Ox.



<u>Решение:</u>

Площадь искомой фигуры состоит из площадей двух фигур: на отрезке **от** $[\mathbf{-3; 0}]$ ***фигура ограничена сверху параболой*** $f(x) = 0.5x^2 + 2x + 3$,

от $[\mathbf{0; 2}]$ ***фигура ограничена сверху прямой*** $g(x) = 3 - x$.

Следовательно, $\boldsymbol{S = S_1 + S_2}$ (*применяется формула 6*)

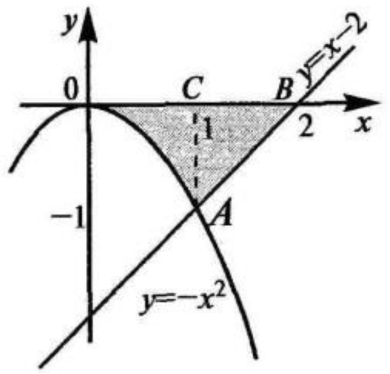
$$S_1 = \int_{-3}^{0} f(x)\,dx = \int_{-3}^{0} (0.5x^2 + 2x + 3)\,dx = \left(\frac{x^3}{6} + x^2 + 3x\right)\Bigg|_{-3}^{0} =$$

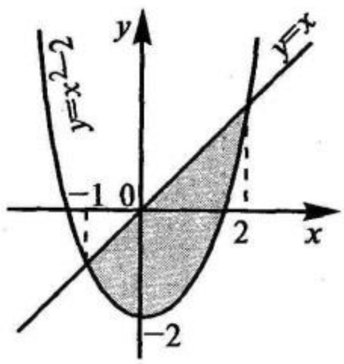
$$= 0 - \left(-\frac{9}{2}\right) = 4{,}5$$

$$S_2 = \int_{0}^{2} g(x)\,dx = \int_{0}^{2} (3 - x)\,dx = \left(3x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{2} = (6 - 2) - 0 = 4$$

$$S = S_1 + S_2 = 4{,}5 + 4 = 8{,}5 \text{ кв. ед.}$$

Задания для самостоятельного решения

<table>
<tr><td>№1</td><td>№2</td></tr>
<tr><td>


Найти площадь фигуры, ограниченной линиями y = -x², y=x -2, x=0
</td><td>


Найти площадь фигуры, ограниченной линиями y= x² -2 , y=x
</td></tr>
</table>

Примечание:

Конспект, задания для самостоятельного решения сдать в электронном формате (фото) ***до 25.04.2020 включительно***, *прикрепив файл в программном обеспечении «Дистанция».*